复杂公式中的简洁概念

曲哲（010163）

2003-12-16

一、目的

混凝土材料性能的复杂性给混凝土构件的设计计算带来很多麻烦。在长期的建设实践中，工程师们逐渐总结出一套足够精确的公式体系，用于混凝土构件的设计。在这个过程中，工程经验与科学概念互相妥协，互相融合，使这套体系既有利于工程应用，又体现着基本的科学概念。

但简洁的科学概念往往被纷繁复杂的公式系数掩盖，使公式显得难以理解。本文将通过比较混凝土构件与理想线弹性材料构件的力学计算公式，发掘复杂公式中蕴含的简洁的科学概念，帮助工程师理解公式，从而灵活的运用公式。

二、基本规定

1. 理想线弹性材料的材料性能

   用于比较的理想线弹性材料满足以下条件：连续、均匀、各向同性、只发生小变形、应力-应变关系如图 1 所示。

2. 线弹性材料的计算公式由材料力学得到
3. 混凝土构件的计算公式采用《混凝土结构设计规范 GB50010》中的公式
4. 混凝土构件的材料性能

   混凝土满足以下条件：连续、均匀、各向异性、只发生小变形、抗压应力-应变关系采用《规范》公式，如图 2 所示。

   增强材料以钢筋为例，满足以下条件：连续、均匀、各向同性、应力-应变关系简化如图 3 所示。

   混凝土与增强材料可靠粘接。

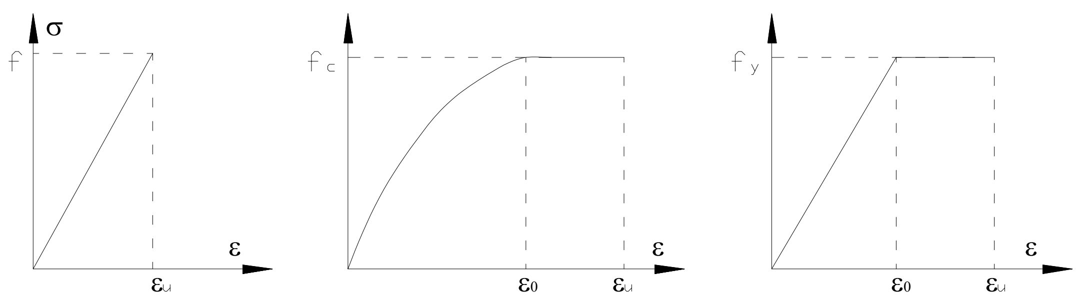

图1　　图2　　图3

三、比较分析

下面以最常见的矩形截面为例，比较理想线弹性材料与钢筋混凝土计算上的差别与联系。

1．弯矩作用下截面上的正应力

理想线弹性构件在弯矩作用下产生的截面正应力可由材料力学求得如下：

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{12 \times M \cdot y}{bh^3}$$

当构件达到极限状态时，截面边缘达到极限正应力：

$$f = \frac{M_u \cdot h/2}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{M_u}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{M_u}{W} \Rightarrow M_u = \frac{1}{6} fbh^2 = f \cdot W$$

式中 M_u 为极限弯矩；

W 称为弹性弯曲截面系数（/m^3）；

$\frac{1}{6}$ 为截面弹性抵抗矩系数；

f 为材料的强度（/MPa）。

钢筋混凝土构件在纯弯作用下的极限弯矩参照《规范》公式如下：

单筋截面：

$$M_u = \alpha_s \cdot f_c bh_0{}^2 = f_c \cdot \alpha_s bh_0{}^2 = f_c \cdot W_c$$

双筋截面：

$$M_u = \alpha_s \cdot f_c bh_0{}^2 + f_y{}' A_s{}'(h_0 - a') = f_c \cdot \alpha_s bh_0{}^2 + f_y{}' \rho' bh_0{}^2 (1 - \frac{a'}{h_0})$$

$$= f_c bh_0{}^2 [\alpha_s + \xi'(1 - \frac{a'}{h_0})] = f_c \cdot W_c$$

对应于理想线弹性材料，W_c 称为弹塑性弯曲截面系数（/m^3）；α_s 或 $\alpha_s + \xi'(1 - \frac{a'}{h_0})$ 称为截面弹塑性抵抗矩系数。f_c 为混凝土轴心抗压强度。

在双筋截面极限弯矩的公式中，定义 $\xi' = \rho' \frac{f_y{}'}{f_c}$ 与适筋梁的相对受压区高度 ξ 有相似的定义，但已经失去了原有的物理意义。

比较钢筋混凝土构件的两个公式，不难看出，双筋公式实际上是把受压筋等效为混凝土计入截面系数。并且，由于 $\xi'(1 - \frac{a'}{h_0}) > 0$，增加受压筋总会对截面系数有积极的贡献，从而提高构件的抗弯承载力。

由以上的分析可以看出，构件的极限弯矩总是由材料强度乘以截面的弯曲系数得到，而弯曲系数又与截面的 bh^2 成正比，即：

极限弯矩 ＝ 材料强度×截面弯曲系数

截面弯曲系数 $\propto$ bh^2

2．剪力作用下截面上的切应力

理想线弹性构件在剪力作用下产生的截面切应力可由材料力学求得如下：

$\tau = \frac{3V}{2bh}(1 - \frac{4y^2}{h^2})$ 最大切应力发生在中性轴上，且 $\tau_{\max} = \frac{3V}{2bh}$。

当构件达到极限状态时，截面中心首先达到极限切应力：

$$\tau_{\max} = \frac{3V_u}{2bh} = f \qquad \Rightarrow \qquad V_u = \frac{2}{3}bh \cdot f$$

式中 V_u 为极限剪力；

f 为材料的强度（/MPa）。

另外不妨称 $\frac{2}{3}bh$ 为弹性截面抗剪系数；

钢筋混凝土构件在纯剪作用下的极限剪力参照《规范》公式如下：

无腹筋构件：

$$V_u = \alpha_c \beta_\rho \beta_h \cdot f_t bh_0 = K \cdot bh_0 \cdot f$$

有腹筋一般受弯构件：

$$V_u = 0.7 f_t bh_0 + 1.25 f_{yv} \frac{A_{sv}}{bs} bh_0 = (0.7 + 1.25\rho_{sv} \frac{f_{yv}}{f_t})bh_0 \cdot f_t = (0.7 + 1.25\xi_{sv})bh_0 \cdot f_t$$

对应于理想线弹性构件，把两个公式中的 $K \cdot bh_0$ 和 $(0.7 + 1.25\xi_{sv})bh_0$ 称为弹塑性截面抗剪系数。f_t 为材料的轴心抗拉强度。

有腹筋构件的公式中，同样出现了与适筋梁相对受压区高度形式相同的量 $\xi_{sv} = \rho_{sv}\frac{f_{yv}}{f_t}$，它实际上把箍筋的强度等效为混凝土的同类强度，计入截面抗剪系数，从而提高构件的抗剪承载力。

由以上的分析可以看出，构件的极限剪力总是由材料强度乘以截面的抗剪系数得到，而抗剪系数又与截面面积 bh 成正比，即：

极限剪力 ＝ 材料强度×截面抗剪系数

截面抗剪系数 $\propto$ 截面面积

3．偏心压力作用下截面的正应力

按照材料力学的方法分析理想线弹性构件如下：

当构件达到极限状态时，截面某侧正应力达到材料强度：

$$f = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e}{W} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} N = \dfrac{1}{1 + \dfrac{6e}{h}} bh \cdot f \\ M = \dfrac{1}{6 + \dfrac{h}{e}} bh^2 \cdot f \end{cases}$$

式中 N、M 分别为极限轴力与极限弯矩，且 M=N×e，e 为轴力的偏心距。

可见对于给定的截面尺寸和材料强度 N、M 都是 e 的函数，且 N 随 e 的增大而减少，轴心受压是受压承载力的上限；M 随 e 的增大而增大，纯弯是受弯承载力的上限。可将 N、M 的关系用 N-M 曲线直观的表示如图 4：

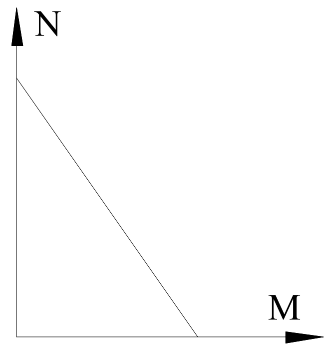

图4

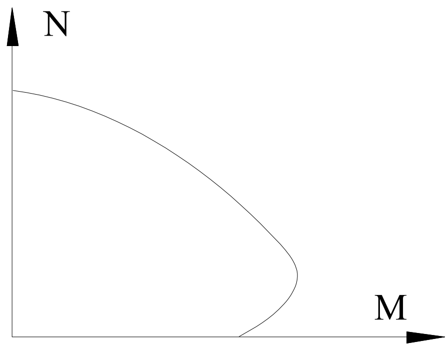

图5

而对于钢筋混凝土构件，参照《规范》公式有（以大偏心受压为例）：

$$\begin{cases} N = f_c bx + f_y' A_s' - f_y A_s = (\xi + \xi' - \xi'') f_c bh_0 \\ M = f_c bx(h_0 - \dfrac{x}{2}) + f_y' A_s'(h_0 - a') = [\alpha_s + \xi'(1 - \dfrac{a'}{h_0})] f_c bh_0{}^2 \end{cases}$$

式中：$\xi = \dfrac{x}{h0}$； $\xi' = \dfrac{f_y' A_s'}{f_c bh_0}$； $\xi'' = \dfrac{f_y A_s}{f_c bh_0}$.

钢筋混凝土的 N-M 曲线如图 5 所示，可见与完全线弹性构件很大的区别。这是由混凝土材料的特殊性能决定的。小偏心受压时，混凝土构件 N、M 对偏心距 e 的响应与弹性材料一致，N 随 e 的增大而减小，M 随 e 的增大而增大。但 e 超过一定界限后，混凝土构件的 N-M 曲线发生转捩。由分析可知这是混凝土构件的一侧在构件达到极限状态前首先屈服造成的。而对于理想线弹性材料，截面两侧的强度完全一样，抗拉与抗压的强度也完全一样，一旦一侧破坏则达到了极限状态，所以不会出现类似混凝土构件的转捩。

另处，由以上的分析可以看出，构件的极限压力总是由材料强度乘以截面的抗压系数得到，而抗压系数又与截面面积 bh 成正比，即：

极限压力 = 材料强度×截面抗压系数

截面抗压系数 ∝ 截面面积

4．受弯构件的挠度

按照材料力学的方法分析理想线弹性受弯构件的挠度如下：

$$\left.\begin{aligned} &\text{均布荷载}: \quad f = \frac{5}{48}\frac{Ml^2}{EI} \\ &\text{集中荷载}: \quad f = \frac{1}{12}\frac{Ml^2}{EI} \end{aligned}\right\} \rightarrow f = S\frac{Ml^2}{EI}$$

其中 EI 称为弹性抗弯刚度，S 为荷载效应系数，与材料无关。

混凝土受弯构件的挠度计算则复杂得多，参照《规范》给出的公式有：

$$f = S\frac{Ml^2}{B_s} \qquad \text{其中} B_s = \frac{E_s A_s h_0{}^2}{\dfrac{\psi}{\eta} + \dfrac{\alpha_E \rho}{\zeta}}$$

Bs 称为弹塑性抗弯刚度。

可见，除了抗弯刚度的确定更加复杂以外，二者在计算挠度时的基本概念是一致的。挠度总可以表示为弯矩 M、效应系数 S、梁长 l 以及抗弯刚度 B 的函数。其中抗弯刚度是只与截面有关的综合性物理

量。

四、总结

把上面举的几个例子总结成一张表。

物理量	理想线弹性材料	钢筋混凝土	说明
极限弯矩	$M_u = \frac{1}{6} fbh^2 = f \cdot W$	$M_u = \begin{cases} f_c \cdot \alpha_s bh_0^2 = f_c \cdot W_c \\ f_c bh_0^2 [\alpha_s + \xi'(1 - \frac{a'}{h_0})] = f_c \cdot W_c \end{cases}$	W、W_c 为抗弯系数，与 bh^2 成正比
极限剪力	$V_u = \frac{2}{3} bh \cdot f = Q \cdot f$	$V_u = \begin{cases} \alpha_c \beta_\rho \beta_h \cdot f_t bh_0 = Q_c \cdot f \\ (0.7 + 1.25\xi_{sv}) bh_0 \cdot f = Q_c \cdot f \end{cases}$	Q、Q_c 为抗剪系数，与 bh 成正比
极限轴力	$N_u = f \cdot bh = f \cdot A$	$N_u = f_c \cdot (\xi + \xi' - \xi'') bh_0 = f_c \cdot A_c$	A、A_c 为抗压系数，与 bh 成正比
挠度	$f = S \frac{Ml^2}{EI}$	$f = S \frac{Ml^2}{\frac{E_s A_s h_0^2}{\frac{\psi}{\eta} + \frac{\alpha_E \rho}{\zeta}}} = S \frac{Ml^2}{B_s}$	EI、B_s 为抗弯刚度

表里的内容只不过是几个简单的例子，工程计算中普遍蕴含着基本的力学概念。

由最简洁的基本概念出发提出计算公式的雏形，再经过大量的工程实践对计算方法进行修正与补充，同时通过深入的科学研究解释与完善每一次修正与补充，并把理论推向深入，这是工程技术发展的正的过程。

而从现有的复杂公式出发，寻根溯源的找出其中蕴含的简洁的科学概念，再寻找使基本概念丰富起来的复杂的工程因素，则是反其道而行。

借用龙驭球先生的话说，前一个过程是把书由薄读厚，而后一个过程则是把书由厚读薄，这实际是提炼升华知识的过程。

在计算工具日益丰富且高度发达的今天，工程师可以从复杂烦琐的计算中解放出来，从事更具创造性的活动。力学的基本概念正是创造的基础。