钢筋混凝土梁正截面计算及相关问题的讨论

Discussions About the Calculation of Normal Section for Reinforced Concrete Beam and Some Relative Problems

曲哲

（清华大学土木工程系结 13 班，北京，100084）

摘要：本文介绍了钢筋混凝土梁正截面计算中极限弯矩、屈服弯矩和开裂弯矩的理论计算，并讨论了配筋率对钢筋混凝土梁的极限弯矩的影响以及按照过镇海提供的混凝土应力应变曲线计算极限弯矩时系数的确定等问题。

关键词：钢筋混凝土 正截面 弯矩 梁

一、极限弯矩 M_{cu} 的计算

对于少筋梁和适筋梁，可按下面的公式计算极限弯矩：

$$M_u = f_y A_s [h_0 - (1-k_2)\frac{f_y A_s}{k_1 f_c b}]$$

式中的参数 k_1、k_2 可按表 1 选用。

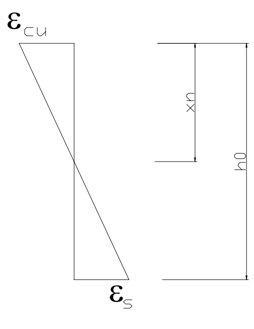
表 1：混凝土受压应力-应变曲线系数 k_1 和 k_2

强度等级	C10	C20	C30	C40	C50	C60	C70	C80
规范 k_1	0.797	0.797	0.797	0.797	0.797	0.774	0.746	0.713
过镇海 k_1	0.788	0.761	0.738	0.718	0.704	0.691	0.681	0.676
规范 k_2	0.588	0.588	0.588	0.588	0.588	0.598	0.608	0.619
过镇海 k_2	0.587	0.596	0.603	0.610	0.615	0.619	0.623	0.625

对于超筋梁，当顶部混凝土受压破坏时，钢筋尚未屈服。此时 $T_s = \varepsilon_s E_s A_s$。

采用平截面假定如右图所示，则

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{cu}(h_0 - x_n)/x_n$$



除此之外超筋梁极限弯矩的计算与适筋梁无异。

忽略混凝土受拉区的贡献，由截面上力的平衡有：

T_s=C

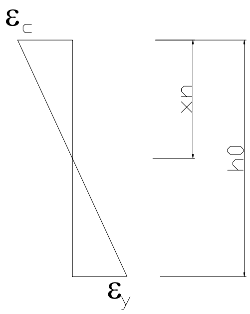
$$\varepsilon_{cu}(h_0 - x_n)/x_n \times E_s A_s = x_n b k_1 f_c$$

容易解出 x_n 如下：

$$x_n = \frac{-\frac{\varepsilon_{cu}E_s A_s}{bk_1 f_c} + \sqrt{(\frac{\varepsilon_{cu}E_s A_s}{bk_1 f_c})^2 + \frac{4\varepsilon_{cu}h_0 E_s A_s}{bk_1 f_c}}}{2}$$

从而可根据公式$M_u = k_1 f_c x_n b[h_0 - (1-k_2)x_n]$计算出超筋梁的极限弯矩。

二、屈服弯矩 M_y 的计算



屈服弯矩的理论计算比较复杂。超筋梁的屈服弯矩意义不大，下面只讨论适筋和少筋的情况，实际上两者可以使用同一个分析过程。

同样忽略受拉区混凝土的贡献。下面计算受压区混凝土的拉应力合力以及钢筋的拉应力合力。

x_n 是一个未知的确定量。

截面曲率
$$\Phi_y = \frac{\varepsilon_y}{h_0 - x_n}, \varepsilon_c = \Phi_y x_n$$

$$C = \int_0^{\phi_y x_n} \sigma_c(\varepsilon) b \frac{1}{\Phi_y} d\varepsilon$$

$$y_c = \frac{\int_0^{\phi_y x_n} \sigma_c(\varepsilon) b \frac{1}{\Phi_y{}^2} \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon}{C}$$

通过平衡方程 T_s=C 求解 x_n。这一过程可用 Matlab 轻易实现。但不便于应用于工程。因为未知量 x_n 存在于运算过程中无法排除，所以难以找到只和应力应变曲线有关的重要量建立便于工程应用的表格。

计算出 x_n 后便可求出 y_c，于是屈服弯矩

$$M_y = f_y A_s (h_0 - x_n + y_c)$$

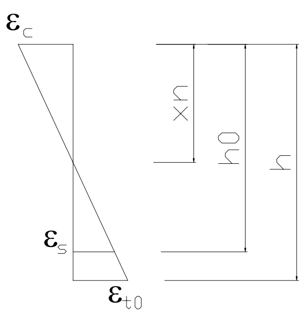
三、开裂弯矩 M_{cr} 的计算

开裂时，梁截面中和轴近似位于截面物理形心的位置。故首先计算中和轴深度 x_n。

单筋梁截面的中和轴位置容易求得：

$$x_n = \frac{\rho_c \frac{bh^2}{2} + \rho_s A_s h_0}{\rho_c bh + \rho_s A_s} = \frac{\rho_c \frac{bh^2}{2} + \rho_s \cdot \rho bh \cdot h_0}{\rho_c bh + \rho_s \cdot \rho bh} = \frac{\rho_c \frac{h}{2} + \rho_s \rho \cdot h_0}{\rho_c + \rho_s \cdot \rho}$$

一般取 x_n=0.53h。



下面分别计算钢筋、受拉区混凝土和受压区混凝土的应力合力。

钢筋：

$$\varepsilon_s = \frac{2h_0 - h}{h} \varepsilon_{t0}$$ 则

$$T_s = \varepsilon_s E_s A_s = \frac{2h_0 - h}{h} \varepsilon_{t0} E_s A_s$$

$$y_s = h_0 - h/2$$

受拉区混凝土：

$$T_c = \int_0^{\varepsilon_{t0}} \sigma_t(\varepsilon) \cdot b \cdot \frac{h}{2\varepsilon_{t0}} d\varepsilon = \frac{bh}{2\varepsilon_{t0}} T_{cr} = \frac{bh}{2} q_1$$

$$y_t = \frac{\int_0^{\varepsilon_{t0}} \sigma_t(\varepsilon) \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2\varepsilon_{t0}}\right)^2 \varepsilon d\varepsilon}{T_c} = \frac{h}{2\varepsilon_{t0}} y_{tr} = \frac{h}{2} q_2$$

其中 q_1、q_2 只与混凝土受拉应力应变曲线的性质有关。

$$C = \int_0^{\varepsilon_c} \sigma_c(\varepsilon) \cdot b \cdot \frac{h}{2\varepsilon_{t0}} d\varepsilon = \frac{bh}{2\varepsilon_{t0}} C_{cr} = \frac{bh}{2} z_1$$

$$y_c = \frac{\int_0^{\varepsilon_c} \sigma_c(\varepsilon) \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2\varepsilon_{t0}}\right)^2 \varepsilon d\varepsilon}{C} = \frac{h}{2\varepsilon_{t0}} y_{cr} = \frac{h}{2} z_2$$

其中 z_1、z_2 只与混凝土受压应力应变曲线的性质有关。

以上各式中

$$\varepsilon_{t0} = 0.65 f_t^{0.54} \times 10^{-4}, \varepsilon_c = \frac{x_n}{h - x_n} \varepsilon_{t0} = 1.13\varepsilon_{t0}$$

由以上分析的结果可以直接求出开裂弯矩 M_{cr}

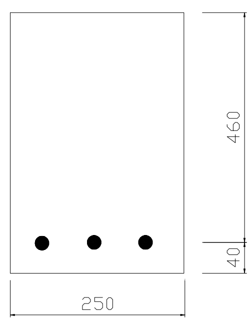
$$M_{cr} = T_s y_s + T_c y_t + C y_c = \frac{bh^2}{4}(q_1 q_2 + z_1 z_2) + \frac{(2h_0 - h)^2}{2h} \varepsilon_{t0} E_s A_s$$

按照《规范》给出的混凝土受压应力应变公式和过镇海给出的混凝土受拉应力应变公式可得出表 3，便于工程中确定 q_1q_2、z_1z_2 的值。

表 3

强度	C10	C20	C30	C40	C50	C60	C70	C80
q_1q_2/MNm	0.58	0.85	1.06	1.24	1.40	1.53	1.65	1.76
z_1z_2/MNm	1.35	2.88	4.54	6.33	8.15	9.77	11.31	12.83

四、配筋率对极限弯矩的影响



分析下面的梁：

截面尺寸如图所示，配筋圆 18 钢筋，屈服强度 f_y=335MPa，$E_s=2\times10^5$。混凝土强度等级 C20。

计算得该梁的最大配筋率为 2.4%。s

对于适筋和少筋的情况：

$$x_n = \frac{f_y A_s}{k_1 f_c b} = \frac{f_y h_0 \rho}{k_1 f_c} = \frac{335 \times 0.46\rho}{0.797 \times 15} = 12.89\rho$$

对于超筋情况：

$$x_n=\frac{-\frac{\varepsilon_{cu}E_sA_s}{bk_1f_c}+\sqrt{(\frac{\varepsilon_{cu}E_sA_s}{bk_1f_c})^2+\frac{4\varepsilon_{cu}h_0E_sA_s}{bk_1f_c}}}{2}=\frac{-25.40\rho+\sqrt{(25.40\rho)^2+46\rho}}{2}$$

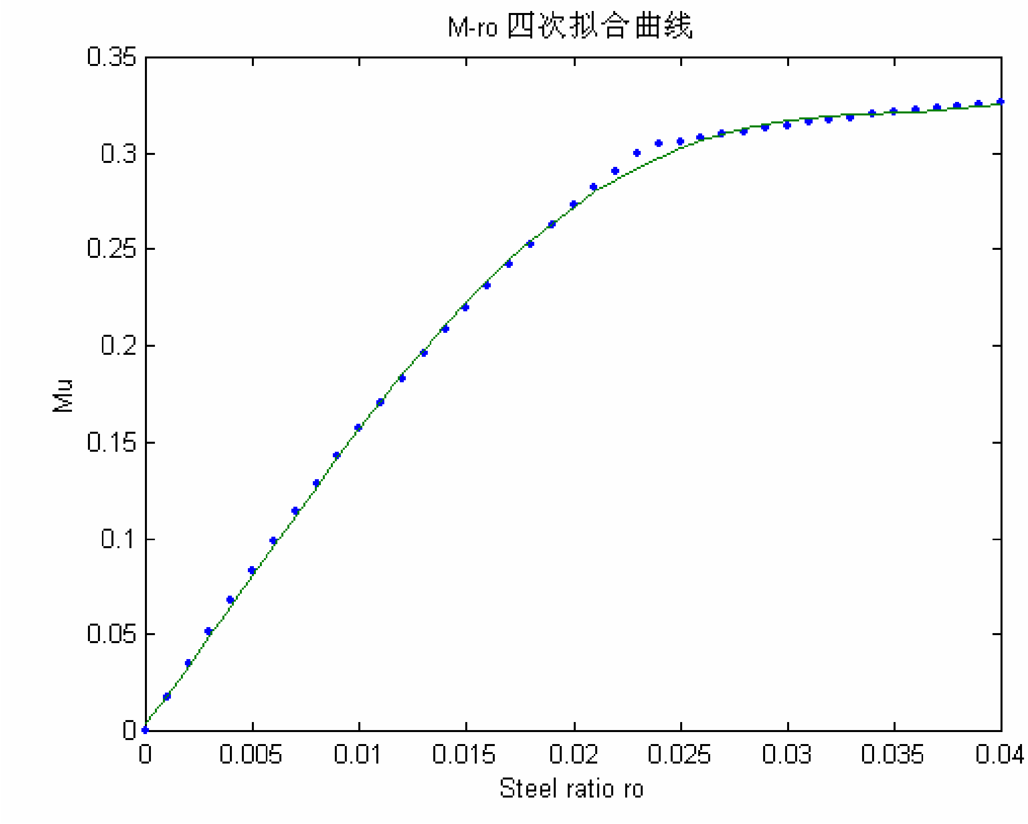
由此可以用配筋率表示极限弯矩如下：

$$M_u=\begin{cases}f_yA_s[h_0-(1-k_2)\frac{f_yA_s}{k_1f_cb}]当\rho\le\rho_{\max}\\k_1f_cx_nb[h_0-(1-k_2)x_n]当\rho\ge\rho_{\max}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}38.525\rho[0.46-5.31\rho]当\rho\le\rho_{\max}\\1.38\times\frac{-25.40\rho+\sqrt{(25.40\rho)^2+46\rho}}{2}-1.236\times(\frac{-25.40\rho+\sqrt{(25.40\rho)^2+46\rho}}{2})^2当\rho\ge\rho_{\max}\end{cases}$$

对该公式进行 4 次多项式拟合得：

$$M_u=(2.76\rho^4-0.22\rho^3+0.0027\rho^2+0.0001\rho\ )\times10^5$$



可见当配筋率达到最大配筋率时，配筋率对极限弯矩的影响发生转折，随着配筋率的提高，极限弯矩已经没有明显的提高了。

五、按过镇海公式求极限弯矩时公式系数 k_1k_2 的确定

1．计算方法

由于过镇海给出的混凝土受压应力应变曲线存在下降段，故按此曲线计算时，钢筋混凝土梁破坏（上层混凝土达到极限压应变）时的弯矩并非极限弯矩，真正的极限弯矩发生在破坏之前。于是需要先找出最大弯矩发生时混凝土的应变，然后分析此时的梁截面，计算出的 k_1k_2 方可用于极限弯矩的计算。

然而，确定极限弯矩需要对具体梁进行全过程分析，不便于得出普适的公式系数。为此，这里在选取真正的 k_1k_2 时排除非曲线因素的干扰，具体做法如下：

对于给定的混凝土峰值压应力，过镇海给出了一条应力应变曲线，对这条曲线在[0, ε]上积分，总可以求得一对 k_1、k_2。

令 ε 在[ε_0，ε_u]之间变化，则可以得到一系列 k_1、k_2。

根据极限弯矩的公式

$$M_u = f_y A_s [h_0 - (1-k_2)\frac{f_y A_s}{k_1 f_c b}]$$

排除非曲线因素的干扰，对每一对 k_1k_2 计算出 $-(1-k_2)/k_1$ 的值，则能够得到最大值的那一对 k_1、k_2 即为所需要的结果。

这一过程在计算机中比较容易实现。

2．结果及分析

按照上述方法算得到的 k_1、k_2 如表 4 所示。

表 4：混凝土受压应力-应变曲线系数 k_1 和 k_2(对于过镇海公式)

f_c/MPa	5	10	15	20	25	30	35	40
k_1	0.802	0.796	0.771	0.752	0.742	0.732	0.722	0.716
k_2	0.583	0.584	0.592	0.598	0.602	0.605	0.608	0.610
f_c	45	50	55	60	65	70	75	80
k_1	0.705	0.702	0.698	0.694	0.685	0.681	0.677	0.673
k_2	0.615	0.616	0.617	0.618	0.622	0.624	0.625	0.626

其中 f_c 为峰值压应力

将算得的数据进行直线拟合，可以得到以下计算公式：

$$k_1 = 0.00002 f_c^{\ 2} - 0.0034 f_c + 0.8185$$

$$k_2 = -0.000006 f_c^{\ 2} + 0.00109 f_c + 0.577$$

下面将按两种公式算得的 k_1k_2 进行比较，结果见表 5。

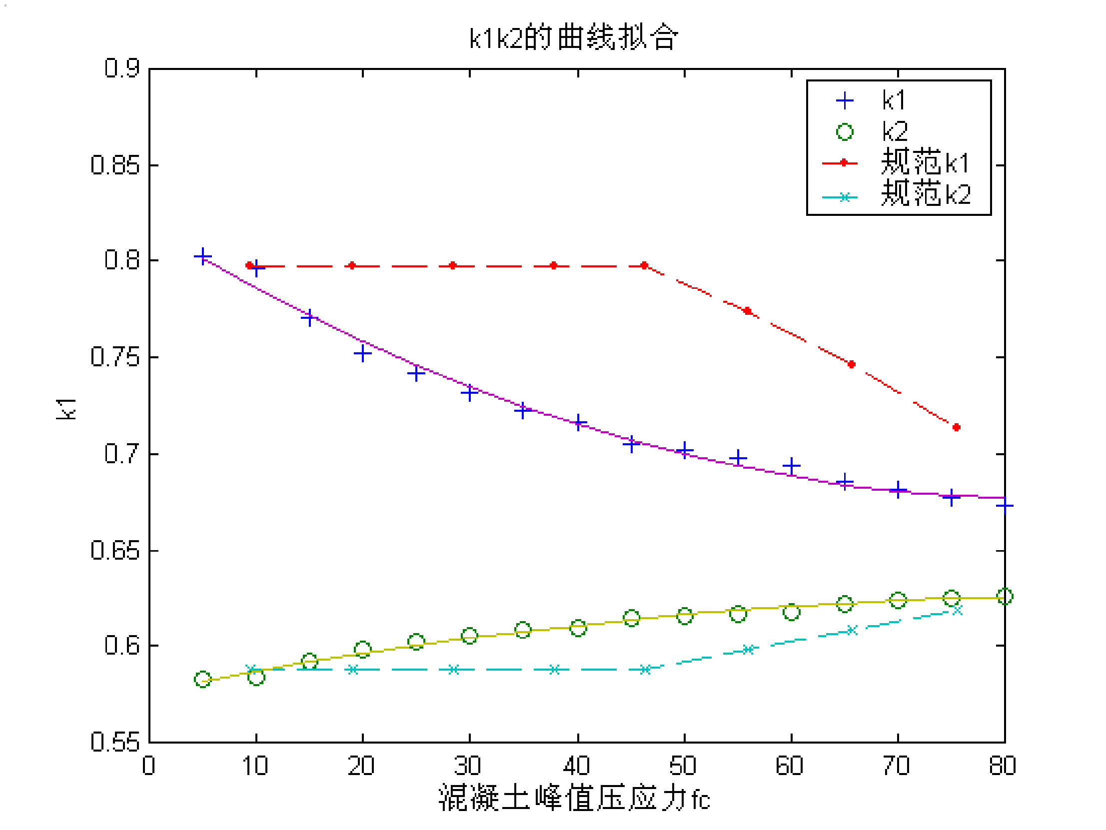
若由公式

$$M_u = f_y A_s [h_0 - (1-k_2)\frac{f_y A_s}{k_1 f_c b}]$$

计算适筋梁的极限弯矩，利用过镇海公式的 k_1、k_2 将得到略有不同的极限弯矩。下面通过计算一根具体适筋梁的极限弯矩比较说明。

表 5

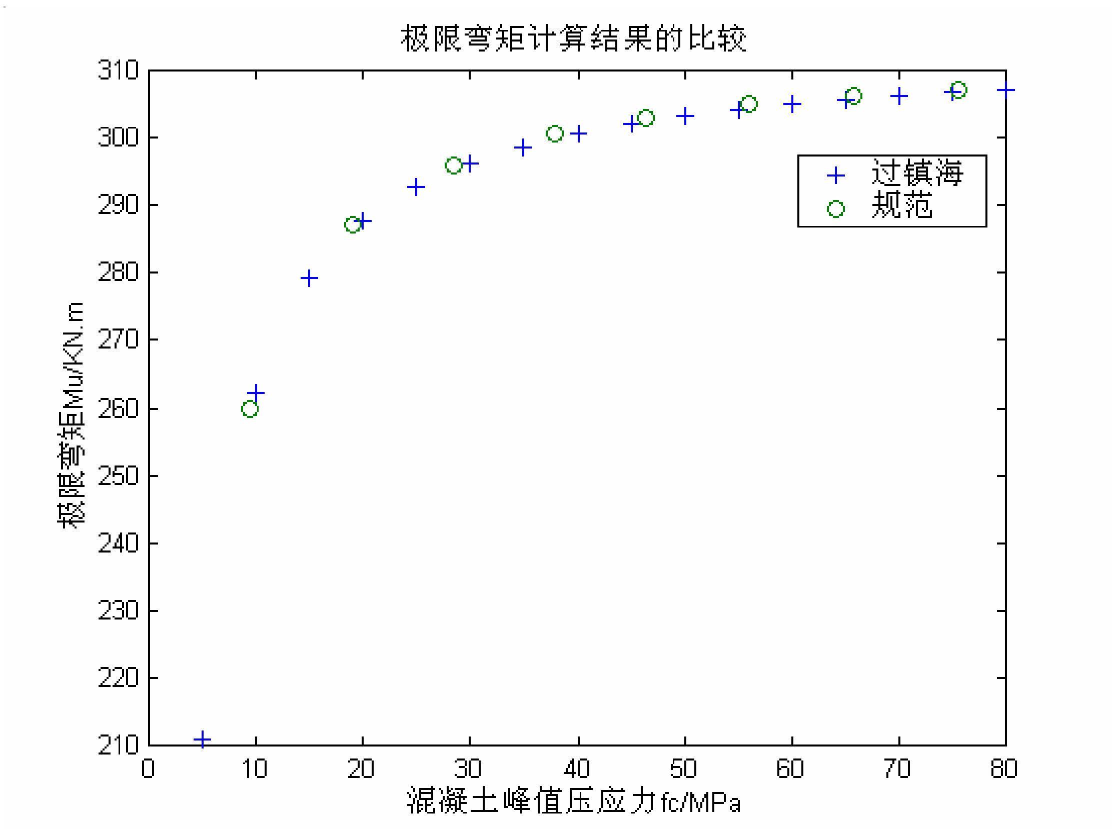
强度等级	C10	C20	C30	C40	C50	C60	C70	C80
规范 k_1	0.797	0.797	0.797	0.797	0.797	0.774	0.746	0.713
过镇海 k_1	0.788	0.761	0.738	0.718	0.704	0.691	0.681	0.676
规范 k_2	0.588	0.588	0.588	0.588	0.588	0.598	0.608	0.619
过镇海 k_2	0.587	0.596	0.603	0.610	0.615	0.619	0.623	0.625



设梁有效截面 250×500mm^2，配筋率 1.5%，钢筋屈服强度 335MPa，则

$$M_u = f_y A_s [h_0 - (1-k_2)\frac{f_y A_s}{k_1 f_c b}] = 335 \times 0.001875 \times (0.5 - (1-k_2)\frac{335 \times 0.001875}{k_1 \times f_c \times 0.25})$$

将两组 f_c、k_1、k_2 代入得到两组极限弯矩，如下图所示：



可见，两种应力应变关系下算得的极限弯矩差异很小。这说明，按《规范》提供的方法计算极限弯矩有较高的准确性。

同时可以发现，随着混凝土强度的提高，极限弯矩的升高越来越缓慢。

参考文献

叶列平. 混凝土结构（上册）. 北京：清华大学出版社，2002

Abstract: The calculations of normal section for reinforced concrete beam, including ultimate moment, yielding moment and cracking moment, are introduced in this paper. Some relative problems, such as the relationship between reinforcement ratio and ultimate moment, and the calculation of the parameters when calculating the ultimate moment according the stress-stain relationship given by Guo Zhenhai, are also discussed in this paper.