

文章编号: 1000-4750(2009)03-0036-07

# 转角软化桁架模型与修正压力场理论的比较研究

曲 哲<sup>1</sup>, \*初明进<sup>1,2</sup>

(1. 清华大学土木工程系, 北京 100084; 2. 烟台大学土木工程学院, 山东, 烟台 264005)

**摘 要:** 以转角软化桁架模型和修正压力场理论为代表的桁架模型是近 30 年来在研究钢筋混凝土剪扭行为的领域内最重要的成果之一。该文首先详细比较了二者的控制方程, 指出其主要区别, 然后通过将这两种模型嵌入通用有限元程序, 比较了二者在钢筋混凝土梁剪切行为方面的模拟效果。通过比较, 指出了修正压力场理论中裂缝检查的不合理性以及混凝土单轴受拉应力-应变关系对模型分析效果的重要影响。最后建议采用一组简单的单轴应力-应变关系。

**关键词:** 钢筋混凝土; 剪切; 转角软化桁架模型; 修正压力场理论; 比较研究

中图分类号: TU528.571 文献标识码: A

## COMPARATIVE STUDY OF ROTATING ANGLE-SOFTENED TRUSS MODEL AND MODIFIED COMPRESSION FIELD THEORY

QU Zhe, \*CHU Ming-jin

(1. Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. School of Civil Engineering, Yantai University, Yantai, Shandong 264005, China)

**Abstract:** Truss model, such as MCFT (modified compression field theory) and RA-STM (rotating angle-softened truss model), is among the most important developments in analyzing the shear and torsion behavior of reinforced concrete in the past thirty years. The governing equations of these two models are compared in this paper, and major difference is pointed out. By implementing them in general-purpose finite element program, the capability in predicting the shear behavior of reinforced concrete beam is then compared. Results show that the crack check in MCFT is unreasonable, and that the uniaxial concrete tensile stress-strain relationship is of key importance. A set of simple uniaxial stress-strain relationships for concrete and steel reinforcement is recommended.

**Key words:** reinforced concrete; shear; rotating angle-softened truss model (RA-STM); modified compression field theory (MCFT); comparative study

压力场理论由 Collins (1978)<sup>[1]</sup>提出, 它是人们用于剪切设计的 45° 桁架比拟法的自然发展。它同时运用力学的三大关系——平衡、协调与物性关系, 找出了求解平面剪切问题的简单易行的方法。修正压力场理论(MCFT)<sup>[2]</sup>是对它的一个发展, 其关键是引入了斜裂缝间混凝土的拉伸硬化, 并通过考

察裂缝处的局部平衡限制混凝土中拉应力的增长。这一做法虽然没有显式的引入裂面剪力, 但间接的体现了裂面剪切对钢筋混凝土单元整体行为的影响。然而 Hsu(1988)<sup>[2]</sup>对此持不同的意见, 他认为 Collins 等人考虑局部平衡的做法是不正确的, Hsu (1988)<sup>[2]</sup>提出的转角软化桁架模型(RA-STM)与

收稿日期: 2007-11-22; 修改日期: 2008-01-24

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(50238030)

作者简介: 曲 哲(1983-), 男, 陕西西安人, 博士生, 从事结构工程研究(E-mail: qz@mails.thu.edu.cn);

\*初明进(1973-), 男, 山东烟台人, 副教授, 博士生, 从事结构工程研究(E-mail: chumj05@mails.thu.edu.cn).

MCFT 采用了基本相同的力学模型, 主要的不同之处: 一是取消了裂缝处局部平衡的检查; 二是不再使用裸筋的应力-应变关系, 而是试图通过大量试验确定混凝土包裹下钢筋的应力-应变关系。这两种模型的基本思想是一样的。它们都致力于创造一种新的正交各向异性的材料本构模型来模拟钢筋混凝土的剪切行为。它们把钢筋和裂缝统统弥散到整个材料中, 把一切复杂的问题, 诸如钢筋与混凝土的界面行为, 开裂等, 统统包在了均质材料中。本质上讲, 修正压力场和转角软化桁架模型都是采用整体式钢筋模型和共轴转动裂缝模型正交各向异性材料本构模型。

Vecchio 和 Hsu 等人分别在将修正压力场理论或转角软化桁架模型应用于有限元分析方面开展了大量的研究工作<sup>[3-6]</sup>, 其它一些学者也曾将修正压力场理论作为本构模型应用于非线性有限元分析(如文献[7])。

我国学者在 20 世纪 90 年代初便开始关注 MCFT 与 RASTM, 并将它们广泛应用于钢筋混凝土构件的剪扭承载力的设计计算<sup>[8-10]</sup>。季韬及其同事对 RASTM 进行了比较深入的讨论并在国外相关研究的基础上提出了随动角软化桁架模型<sup>[11]</sup>。国内鲜有研究将 MCFT 或 RASTM 作为一种钢筋混凝土材料本构用于有限元分析。

## 1 控制方程的比较

修正压力场理论和转角软化桁架模型所采用的基本力学原理完全一样, 都属于转动裂缝模型, 对于平面应力问题可以归纳为 10 个独立的方程, 包含 13 个未知数。给定其中的三个未知数, 则可以求出其它未知数。下面从建立材料本构关系的角度给出 10 个独立的方程, 并假设已知平面应力状态下的应变向量 $[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}]$ , 其中 $\varepsilon_{xy}$ 为张量应变而非工程应变。

### 1.1 几何方程

主应变倾角:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left( \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_y - \varepsilon_x} \right) \quad (1)$$

主压应变:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad (2)$$

主拉应变:

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad (3)$$

### 1.2 单轴应力-应变关系

混凝土主压应力:

$$\sigma_{c1} = F_c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (4)$$

混凝土主拉应力:

$$\sigma_{c2} = F_t(\varepsilon_2) \quad (5)$$

x 方向钢筋应力:

$$\sigma_{sx} = F_s(\varepsilon_x) \quad (6)$$

y 方向钢筋应力:

$$\sigma_{sy} = F_s(\varepsilon_y) \quad (7)$$

### 1.3 平衡方程

总应力 x 方向的分量:

$$\sigma_x = \sigma_{c1} \cos^2 \theta + \sigma_{c2} \sin^2 \theta + \sigma_{sx} \rho_x \quad (8)$$

总应力 y 方向的分量:

$$\sigma_y = \sigma_{c1} \sin^2 \theta + \sigma_{c2} \cos^2 \theta + \sigma_{sy} \rho_y \quad (9)$$

总剪应力:

$$\sigma_{xy} = (\sigma_{c2} - \sigma_{c1}) \sin \theta \cos \theta \quad (10)$$

通过以上 10 个方程, 可以由应力向量得到应变向量, 从而建立了材料的应力-应变关系。这 10 个方程包含了力学的基本方程, 其中有 3 个协调方程, 4 个单轴应力-应变方程和 3 个平衡方程。修正压力场理论与转角软化桁架模型的区别仅在于单轴应力-应变方程的不同。表 1 列出了两者所采用的混凝土和钢筋的单轴应力-应变关系。这两种模型在其发展过程中有修改, 表 1 中列出的是各自所采用的典型的应力-应变关系。

两种模型关于混凝土单轴受压应力-应变关系的分歧主要在于受压软化行为。修正压力场理论认为, 垂直方向的拉应变只影响混凝土的峰值压应力, 而不会改变混凝土的峰值压应变。而转角软化桁架模型则认为垂直方向的拉应变会同时影响混凝土的峰值压应变和压应力, 如图 1 所示。图 2 比较了二者采用的软化系数 $\zeta$ 随垂直方向混凝土拉应变的增大而变化的规律。

表 1 单轴应力-应变关系

Table 1 Uniaxial stress-strain relationships

| 转角软化桁架模型(RASTM) |  | 修正压力场理论(MCFT)  |  |
|-----------------|--|--|--|
| 混凝土<br>单轴受压     | Balerbi 和 Hsu 1995 <sup>[12]</sup>   | Bentz 2000 <sup>[14]</sup>   |  |
|                 | $\sigma_c = \zeta f'_c \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_c}{\zeta \varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon_c}{\zeta \varepsilon_0} \right)^2 \right], \quad \varepsilon_c \leq \zeta \varepsilon_0$ | $\sigma_c = \zeta f'_c \frac{n(\varepsilon_c / \varepsilon_0)}{n-1 + (\varepsilon_c / \varepsilon_0)^{nk}}$                        |  |
|                 | $\sigma_c = \zeta f'_c \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_c / \zeta \varepsilon_0 - 1}{2 / \zeta - 1} \right)^2 \right], \quad \varepsilon_c > \zeta \varepsilon_0$   | $n = 0.8 + f'_c / 17$  |  |
|                 | $\zeta = \frac{1.0}{\sqrt{1 + 400 \varepsilon_t}}$   | $k = \begin{cases} 1.0, & \varepsilon_c \leq \varepsilon_0 \\ 0.67 + \frac{f'_c}{62}, & \varepsilon_c > \varepsilon_0 \end{cases}$ |  |
|                 |  | $\zeta = \min \left( 1.0, \frac{1}{0.8 + 170 \varepsilon_t} \right)$   |  |
| 混凝土<br>单轴受拉     | Balerbi 和 Hsu 1994 <sup>[13]</sup>   | Vecchio 和 Collins 1986 <sup>[2]</sup>  |  |
|                 | $\sigma_t = \min \left[ E_c \varepsilon_t, f_t \left( \frac{f_t / E_c}{\varepsilon_t} \right)^{0.4} \right]$   | $\sigma_t = \min [\sigma_{t1}, \sigma_{t2}, \sigma_{t3}, \sigma_{t4}]$   |  |
|                 |  | $\sigma_{t1} = \min \left[ E_c \varepsilon_t, \frac{f_t}{1 + \sqrt{200 \varepsilon_t}} \right]$                                    |  |
|                 |  | $\sigma_{t2} = \sigma_{cx} \cos^2 \theta + \sigma_{cy} \sin^2 \theta$  |  |
|                 |  | $\sigma_{t3} = \sigma_{cx} + \min(v_{ci1}, v_{ci2}) \cot \theta$   |  |
|                 |  | $\sigma_{t4} = \sigma_{cy} + \min(v_{ci1}, v_{ci2}) \tan \theta$   |  |
|                 |  | $\sigma_{cx} = \rho_x (f_{yx} - \sigma_{sx})$  |  |
|                 |  | $\sigma_{cy} = \rho_y (f_{yy} - \sigma_{sy})$  |  |
|                 |  | $v_{ci1} \text{ 取自文献[15]}$   |  |
|                 |  | $v_{ci2} =  \sigma_{cx} - \sigma_{cy}  \sin \theta \cos \theta$  |  |
| 钢筋<br>单轴受力      | Balerbi 和 Hsu 1994 <sup>[13]</sup>   | 理想弹性   |  |
|                 | $f_s = E_s \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s \leq (0.93 - 2B) \varepsilon_y$  | $f_s = E_s \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s \leq \varepsilon_y$  |  |
|                 | $f_s = K f_y, \quad \varepsilon_s > (0.93 - 2B) \varepsilon_y$   | $f_s = f_y, \quad \varepsilon_s > \varepsilon_y$   |  |
|                 | $B = \frac{1}{\rho_s} \left( \frac{f_t}{f_y} \right)^{1.5}$  |  |  |
|                 | $K = 0.91 - 2B + (0.02 + 0.25B) \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_y}$   |  |  |

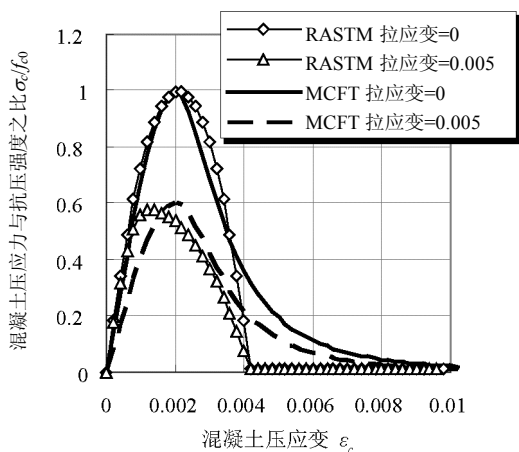


图 1 混凝土受压单轴应力应变关系及其软化  
Fig.1 Concrete uniaxial compressive stress-strain relationship

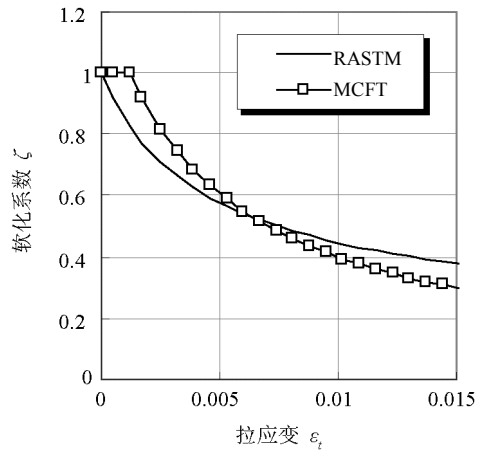


图 2 混凝土受压软化系数  
Fig.2 Compressive softening factor of concrete

两种模型关于混凝土单轴受拉应力-应变关系的分歧表现在两个方面：一是受拉应力-应变曲线下降段的软化模量；二是裂缝检查。修正压力场理论采用了较为平缓的下降段，同时根据裂缝局部的平衡条件，通过裂缝检查对该曲线进行修正。从图 3 中可以看出这一修正的实际效果是削去了曲线的峰。削峰的程度主要取决于钢筋配筋率以及钢筋的应力水平。转角软化桁架模型没有裂缝检查，同时采用了相对陡峭的下降段。

图 3 中同时画出了我国混凝土规范<sup>[16]</sup>建议的过镇海曲线。该曲线以素混凝土为研究对象。它的上升段带有轻微的非线性，下降段则较上述两种模型中的曲线都更为陡峭。

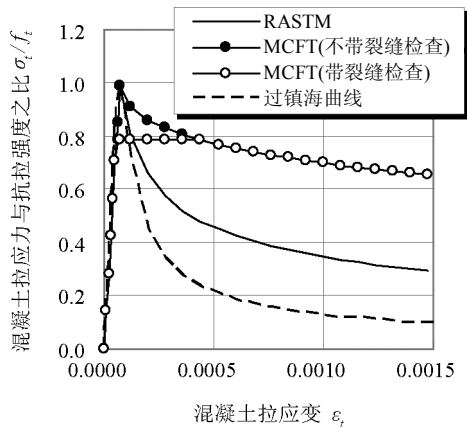


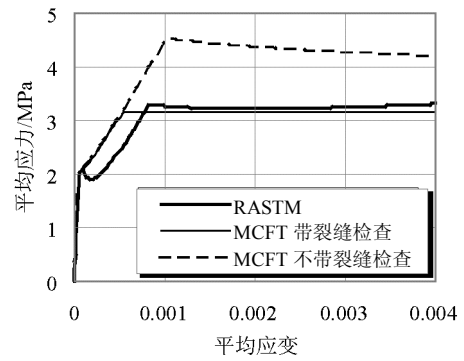
图 3 混凝土单轴受拉应力-应变关系

Fig.3 Concrete uniaxial tensile stress-strain relationship

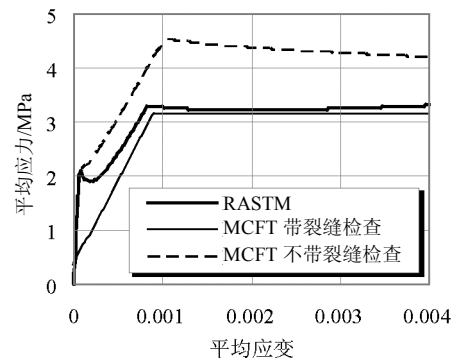
图 4 以一个钢筋混凝土构件在单轴向拉作用下的行为展示了裂缝检查的效果。该钢筋混凝土构件只在受拉方配置 0.15% 的钢筋，钢筋屈服强度为 210MPa，混凝土轴心受压强度为 40MPa。图 4(a) 中的裂缝检查只根据受拉方向的裂缝平衡来限制混凝土中的拉应力。这时，MCFT(带裂缝检查)与 RASTM 给出了大致相同的结果。差别之一是混凝土开裂时 RASTM 的软化速度较快，二是钢筋屈服后 RASTM 中的混凝土仍能承担一定的拉应力。

然而在平面应力问题的分析中，裂缝检查要同时根据两个方向的裂缝平衡来限制混凝土中的拉应力，如图 4(b)所示。这时 MCFT 将使混凝土过早开裂，从而过份低估了混凝土的抗拉能力。

值得注意的是，对于素混凝土，裂缝检查的实际效果是完全忽略了混凝土的抗拉强度。在后面的分析中会看到，这样做不但会低估混凝土的承载能力，而且对计算的收敛性也提出了更加苛刻的要求。



(a) 只在一个方向进行裂缝检查



(b) 两个方向一起进行裂缝检查

图 4 钢筋混凝土单轴受拉行为

Fig.4 Concrete uniaxial behavior in tension

关于钢筋，修正压力场理论直接采用裸露钢筋的应力-应变曲线，并假设为理想弹塑性行为。转角软化桁架模型则采用了“混凝土中的钢筋”的概念，相当于把钢筋及其与混凝土的界面作为一种材料来看待，建议宏观的应力-应变关系。这样，钢筋的表观屈服强度有所降低，屈服后线性强化，如图 5 所示。

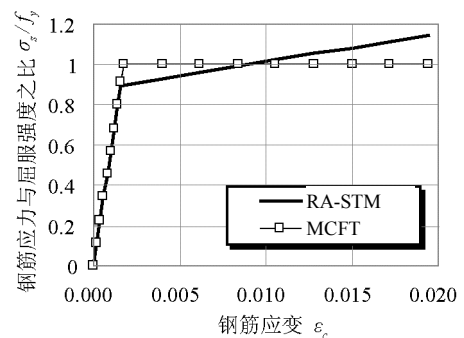


图 5 钢筋单轴受力应力-应变关系

Fig.5 Steel rebar uniaxial stress-strain relationship

## 2 有限元集成

结合上述应力-应变关系，根据式(1)一式(10)可以建立起由应变向量求应力向量的本构关系。本

节将这一本构关系通过用户自定义材料 UMAT 子程序接口嵌入通用有限元程序 ABAQUS 6.5。同时为了满足增量法迭代计算的需要,采用向前差分法

计算材料的切线刚度矩阵,具体流程如图 6 所示。程序框架确定以后,具体的应力-应变关系可以自如选用。

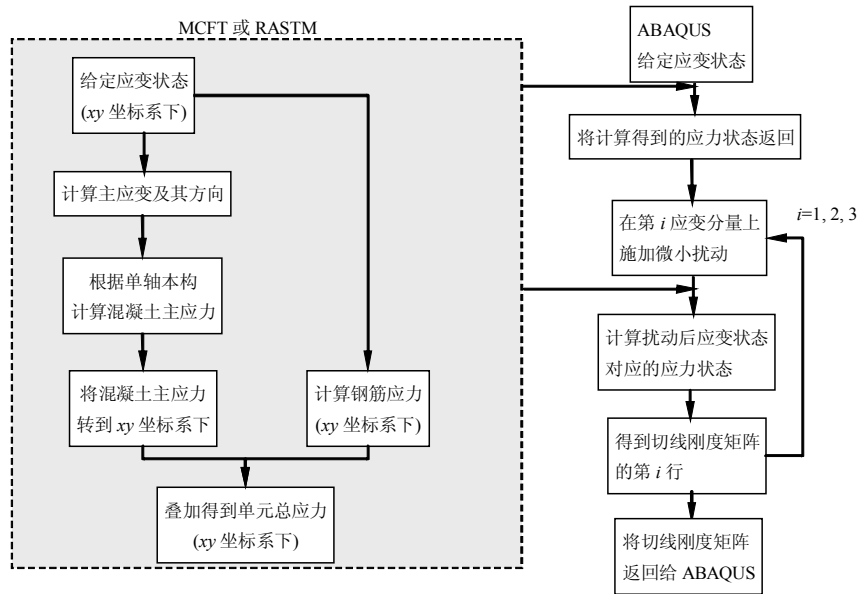


图 6 MCFT 或 RASTM 在 ABAQUS 用户子程序中的实现流程  
Fig.6 Implementation flowchart of MCFT or RASTM in ABAQUS user-subroutine

### 3 分析效果的比较

Bresler 和 Scordelis (1963)<sup>[17]</sup>给出了一组钢筋混凝土梁剪切和弯曲破坏的试验记录。这组试验数据多次被 Vecchio 和 Hsu 等人在各自的研究中采用<sup>[18-20]</sup>。本节利用这一组试验中 4 个典型的剪切破坏梁的试验结果考察采用不同混凝土和钢筋应力-应变关系的 MCFT 或 RASTM 的分析效果。为此,采用以下 5 种应力-应变关系的组合分别进行计算,从 MCFT 逐步过渡到 RASTM。这些分析对象的基本参数如表 2 所列。

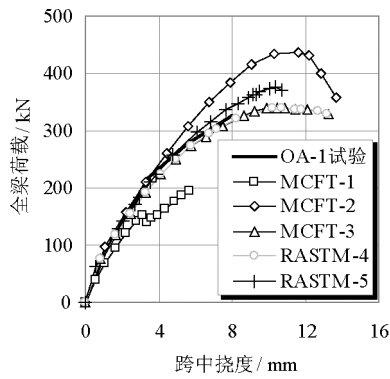
- 1) MCFT-1: 完全采用表 1 中 MCFT 的应力-应变关系。
- 2) MCFT-2: 在 MCFT-1 的基础上取消裂缝检查。
- 3) MCFT-3: 把 MCFT-2 中的混凝土单轴受拉应力-应变关系改为 RASTM 建议的公式。
- 4) RASTM-4: 把 MCFT-3 中的钢筋单轴受压应力-应变关系改为 RASTM 建议的公式。
- 5) RASTM-5: 把 RASTM-4 中的混凝土单轴应力-应变关系改为 RASTM 建议的公式,即完全采用表 1 中 RA-STM 的应力-应变关系。

表 2 Bresler 和 Scordelis (1963)<sup>[17]</sup>试验参数  
Table 2 Experiment details in Bresler and Scordelis (1963)

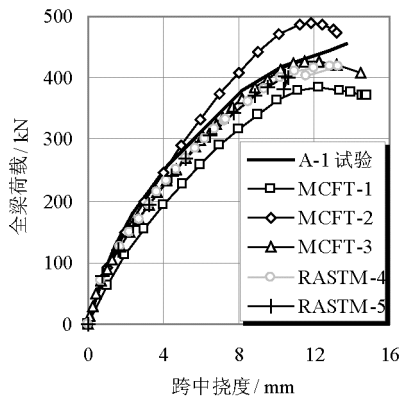
| 试件编号              | OA-1  | A-1   | B-1   | C-1   |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|
| 混凝土强度 $f'_c$ /MPa | 22.5  | 24.1  | 24.8  | 29.6  |
| 梁宽 $b$ /mm        | 310   | 307   | 231   | 155   |
| 梁高 $h$ /mm        | 556   | 561   | 556   | 464   |
| 有效高度 $d$ /mm      | 461   | 466   | 461   | 464   |
| 剪跨比 $\lambda$     | 3.97  | 3.92  | 3.95  | 3.95  |
| 受拉纵筋配筋率/(%)       | 1.81  | 1.80  | 2.43  | 1.80  |
| 受压纵筋配筋率/(%)       | 0.000 | 0.180 | 0.243 | 0.361 |
| 配箍率/(%)           | 0.000 | 0.100 | 0.147 | 0.198 |
| 抗剪承载力/kN          | 166.8 | 233.5 | 222.4 | 155.7 |

以下所有分析均在 ABAQUS 6.5-1 中进行,采用平面应力模型,混凝土采用 4 节点全积分单元 CPS4;纵筋采用平面 2 节点杆单元 T2D2 并通过 embed 方式嵌入混凝土梁腹,为分离式建模,且不考虑钢筋与混凝土之间的滑移;箍筋直接以配箍率的形式在 MCFT 或 RASTM 材料参数中输入,为整体式建模。采用上文提及的用户自定义材料子程序 UMAT 实现 MCFT 或 RASTM 模型。采用位移增量加载,并由弧长法控制加载增量。

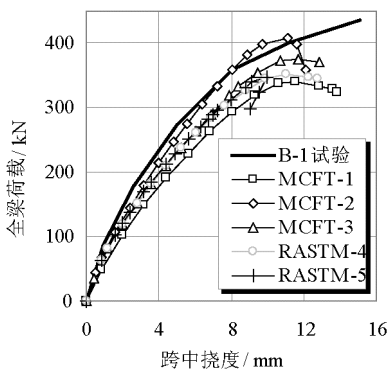
图 7 比较上述应力-应变关系的 5 种组合在分析 OA-1、A-1、B-1 和 C-1 四个试件中的效果。OA-1 与 A-1 的区别仅在于 OA-1 没有箍筋而 A-1 配有箍筋。B-1 和 C-1 两个试件与 A-1 试件的区别仅在于横截面宽度与配筋率的不同。



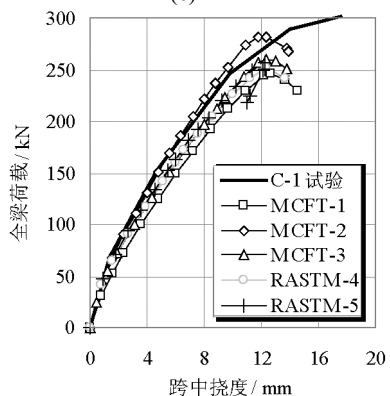
(a) OA-1



(b) A-1



(c) B-1



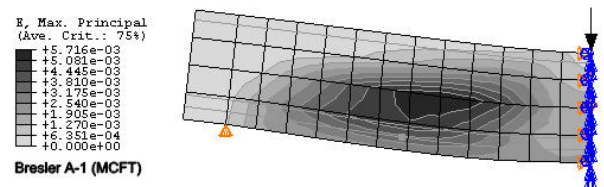
(d) C-1

图7 Bresler 和 Scordelis 1963<sup>[17]</sup>试件荷载-位移曲线  
Fig.7 Experimental and calculated load displacement curves of specimens in Bresler and Scordelis 1993

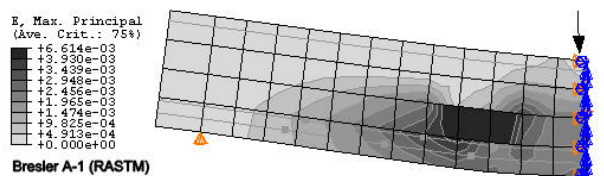
在图 7(a)中, MCFT-1 没能计算出试件的极限状态而过早地由于收敛问题导致计算中止。而其它几种模型均能较好的计算出极限状态。各图中均以荷载出现下降且不再超越时的状态作为极限状态。MCFT-1 的过早中止与它采用了裂缝检查有关。

从图 7 中可以看出, MCFT-1 低估了试件的刚度和承载力, 取消裂缝检查后, MCFT-2 则高估了试件的承载力。再将受拉软化曲线改为 RASTM 采用的较为陡峭的下降段, 则 MCFT-3 给出的结果比较接近试验结果。而 MCFT-3 与 RASTM-4、RASTM-5 之间的差别并不显著, 这三者之间的差别在于混凝土受压应力-应变曲线与钢筋的应力-应变曲线。由此可以看出, 混凝土的单轴受拉行为是影响 MCFT 或 RASTM 分析效果的主要因素。

图 8 显示了 MCFT 与 RASTM 分析得到的 A-1 试件梁腹的主拉应变的分布。二者差别不大, 只是 RASTM 的结果显示的梁腹裂缝更靠近跨中。



(a) MCFT 得到的结果(计算中止时)



(b) RASTM 得到的结果

图 8 试件 A-1 极限状态时的主拉应变分布

Fig.8 Calculated distribution of principle tensile strain of specimen A-1 at ultimate state

从以上分析与试验结果的对比中可以看出:

(1) 在 MCFT 或 RASTM 中, 混凝土与钢筋的单轴应力-应变关系对模型分析效果具有显著的影响, 而材料的单轴应力-应变关系具有不确定性。

(2) 上述计算模型基本能够把握钢筋混凝土梁剪切破坏的特征, 如裂缝的发展与裂缝区域的分布等。

## 4 结论

根据以上的讨论, 可以得出以下结论:

(1) MCFT 或 RASTM 将钢筋与裂缝均弥散于材料中, 模型中并不存在裂缝。裂缝检查所采用的裂缝处局部平衡的原理并不适用。且从分析效果上看, 裂缝检查往往低估了混凝土的抗拉能力, 这个问题对于无腹筋梁尤为严重。另一方面, 为了使计算结果更接近试验, 采用了裂缝检查的 MCFT 模型不得不在混凝土受拉开裂后采用非常平缓的下降段曲线(如图 3)。故本文建议取消裂缝检查, 并代之以 RASTM 建议的较为陡峭的混凝土受拉下降段。

(2) 与混凝土构件剪切破坏行为的离散性相比, MCFT 与 RASTM 对混凝土的受压行为和钢筋受力行为的规定对计算结果的影响并不显著。为简单起见, 建议采用 MCFT 规定的相关应力-应变关系。

#### 参考文献:

- [1] Collins M P. Towards a rational theory for RC members in shear [J]. ASCE Journal of the Structural Division, 1978, 104(ST4): 649—666.
- [2] Vecchio F J, Collins M P. The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear [J]. ACI Journal, 1986, 83(2): 219—231.
- [3] Vecchio F J. Analysis of shear-critical reinforced concrete beams [J]. ACI Structural Journal, 2000, 97(1): 102—110.
- [4] Wang T J, Hsu T T C. Nonlinear finite element analysis of concrete structures using new constitutive models [J]. Computers and Structures, 2001, 79(32): 2781—2791.
- [5] Palermo D, Vecchio F J. Compression field modeling of reinforced concrete subjected to reversed loading: formulation [J]. ACI Structural Journal, 2003, 100(5): 616—625.
- [6] Minelli F, Vecchio F J. Compression field modeling of fiber-reinforced concrete members under shear loading [J]. ACI Structural Journal, 2006, 103(2): 244—252.
- [7] Foster S J, Marti P. Cracked membrane model: Finite element implementation [J]. Journal of Structural Engineering, 2003, 129(9): 1155—1163.
- [8] 许克宾, 霍铭焯, 陈良江. 钢筋混凝土/预应力混凝土梁抗剪强度的软化桁架理论及试验研究[J]. 铁道学报 1991, 13(3): 88—96.  
Xu Kebin, Huo Mingxuan, Chen Liangjiang. Softening truss theory and an experimental study of RC/PC beams [J]. Railway Journal, 1991, 13(3): 88—96. (in Chinese)
- [9] 刘伟庆, 胡松林. 钢筋混凝土矩形截面复合受扭构件的软化桁架模型解[J]. 东南大学学报, 1992, 22(5): 76—83.  
Liu Weiqing, Hu Songlin. Application of the softening truss model to the analysis of RC combined torsional members [J]. Journal of Southeast University, 1992, 22(5): 76—83. (in Chinese)
- [10] 唐兴荣, 蒋永生, 丁大钧. 软化桁架理论在钢纤维高强砼低剪力墙中的应用[J]. 建筑结构学报, 1993, 14(2): 2—11.  
Tang Xingrong, Jiang Yangsheng, Ding Dajun. Application of the theory of softened truss to low-rise steel fiber high strength concrete shear walls [J]. Journal of Building Structures, 1993, 14(2): 2—11. (in Chinese)
- [11] 季韬, 郑作樵, 郑建岚. 一种新的钢筋混凝土软化桁架模型 [J]. 建筑结构学报, 2001, 22(1): 69—75.  
Ji Tao, Zheng Zuoqiao, Zheng Jianlan. A new softened truss model for reinforced concrete [J]. Journal of Building Structures, 2001, 22(1): 69—75. (in Chinese)
- [12] Belarbi A, Hsu T T C. Constitutive laws of softened concrete in biaxial tension-compression [J]. ACI Structure Journal, 1995, 92(5): 562—573.
- [13] Belarbi A, Hsu T T C. Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete [J]. ACI Structure Journal, 1994, 91(4): 465—472.
- [14] Bentz E C. Sectional analysis of reinforced concrete members [D]. Canada: University of Toronto, 2000.
- [15] Walraven J C. Fundamental analysis of aggregate interlock [J]. ASCE Journal of the Structural Division, 1981, 107(ST11): 2245—2270.
- [16] GB50010-2002, 混凝土结构设计规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002  
GB50010-2002, Code for design of concrete structures [S]. Beijing: China Architecture Industry Press, 2002. (in Chinese)
- [17] Bresler B, Scordelis A C. Shear strength of reinforced concrete beams [J]. ACI Journal, 1963, 60(1): 51—74.
- [18] Vecchio F J. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete membrane [J]. ACI Structural Journal, 1989, 86(1): 26—35.
- [19] Vecchio F J, Shim W. Experimental and analytical reexamination of classic concrete beam tests [J]. Journal of Structural Engineering, 2004, 130(3): 460—469.
- [20] Wang T, Hsu T T C. Nonlinear finite element analysis of concrete structures using new constitutive models [J]. Computers and Structures, 2001(79): 2781—2791.